システム/制御/情報，Vol. 44, No. 6, pp. 331–334, 2000

「制御系構築を支援するソフトウェア特集号」

SCI フォーラム

Polbox: 多項式行列ツールボックス

杉本　謙二*

1.　はじめに

多項式行列ツールボックス（Polynomial Toolbox，以下Polboxと略記）は，オランダのH. Kwakernaak，チェコのM. Sebekらを中心として作成されたMATLABのツールボックスである．彼らはPolyXという会社を作り，このソフトウエアをサードパーティで販売している．また，ヨーロッパ各国の研究機関に呼びかけてEuropolyという研究グループを組織し，多項式アプローチによる理論研究と産業界への応用を促進している．

いま，なぜ多項式行列なのか．本稿ではこの手法の特徴を考察し，基礎理論を復習した上で，上記のツールボックスの概略を紹介する [1]．

なお，PolboxについてのWebサイトは

http://www.polyx.cz または http://www.polyx.com

EuropolyについてのWebサイトは

http://www.utia.cas.cz/europoly/

をご覧下さい．

2.　背景説明

状態空間法は動的システムを表現するツールとして最もよく知られているが，かつては$k[z]$-加群アプローチや幾何学的アプローチなど，様々な表現手段が提案され活発に研究されていた [2,3]．

多項式行列アプローチもその一つであり，Rosenbrock，Wolovichらの研究に始まる [4,5]．その成果は例えば，KuceraやKailathのテキストによく整理されている [6,7]．また，国内でもいくつかの教科書に優れた説明があるし [8–10]，簡潔な解説も既に存在する [11]．多項式行列と状態空間，$k[z]$-加群や幾何学的アプローチとの相互関係についても盛んに研究された [12,13]．

現在，これらの手法は少なくとも国内ではあまり注目されておらず，多項式行列アプローチも，適応制御を除けば主流とは言えないようである．むしろ状態空間法が唯一の表現手段のように思われているのではないだろうか．しかし，線形多入出力システムに関する限り，今後も多項式行列が強力な表現ツールになり得るという可能性は認識しておく必要がある．具体的には，次の3点を挙げておこう．

(1)　入力/出力信号間の対応関係を直接，記述できる

入力信号$u(t)$と出力信号$y(t)$の間の関係を

$$\tilde{D}(p)y(t)=\tilde{N}(p)u(t) \tag{1}$$

と表すことは，1入出力系からの自然な拡張であり，利点も多いものと期待される．ここに$\tilde{D}(p)$と$\tilde{N}(p)$は左既約な多項式行列（$\tilde{D}(p)$は正方）であり，pは微分または時間進み作用素を表す（既約性の定義は3節を参照）．

たとえば，(1)式は多入出力システムの同定に有用であると思われる．直接この形で同定を行うことはまだあまりないようであるが，可観測標準形での状態空間表現から(1)式を導くことは容易である．また，多入出力系の適応制御では多項式行列を用いた手法が活発に研究されている [14]．ただし，次数の決定が1入出力と比べて飛躍的に難しく（行ごとに決める必要があるので），実用化にはまだ課題が残る．

このように，モデリングに関わる分野での研究は今後の進展が大いに期待される．さらに，ロバスト制御においても，(1)式の係数の不確かさを直接，取り扱う理論が構築されれば実用上も望ましいと筆者は考えている．

なお，(1)式の表現はbehavioral approachとも密接に関連している [17,18]．

(2)　システムの代数的構造を見通しよく記述できる

例えば，多項式行列の右（左）既約分解はある意味で可制御（可観測）標準形に対応しており，可制御性（Kronecker）指数が列次数に，可観測性指数が行次数に相当する．既約性と最小実現との関連も興味深い．また，状態フィードバックによる設計の自由度も，右既約分解により見通し良く表せる．

このような代数的構造についての研究は既にほぼ完成しており，現在は有界実性や正実性に代表されるシステムの解析的な性質に関心が集中している．こちらの研究には状態空間表現が適しているようである．しかし，ヨーロッパではシステム構造と制御に関する学会 [15] が定期的に開催され，活発な研究が続いている．

* 奈良先端科学技術大学院大学　情報科学研究科
Key Words: polynomial matrix, multivariable linear systems, control system design, MATLAB toolbox.

(3) プロパでない場合も変わりなく扱える

状態空間表現されたシステムの伝達関数行列はプロパであるが，非標準な H_∞ 制御問題などではプロパでない有理関数行列に対して種々の行列分解を扱う必要が生じる．この困難さを避けるため，状態空間表現に代わりディスクリプタ表現を用いる手法がよく知られている．これに対して，多項式行列による行列分解の手法も存在し，プロパでない場合も全く同様に扱えるため，特に手法を使い分ける必要はないという利点がある．

さて，以上に挙げたような利点（ないしは，その可能性）にも関わらず，多項式行列があまり省みられなくなった一因として，多項式行列演算は数値計算に不向きであるとの認識が挙げられる．確かに，与えられた伝達関数行列から既約分解を求める操作は数値的に不安定である．しかし，この操作は最小実現を求めることと等価であり，言わば逆問題の一種であるから，スムースに計算できないのはむしろ当然である．

また，多項式行列の性質を論じる際にはSmith正準形（単因子）を用いることが多いが，これが数値的に望ましくないことも確かである．しかし，実際の計算でSmith正準形を導出する必要は全くなく，より数値計算に適した多項式行列演算を用いれば良い．これは，状態空間法において理論では可制御・可観測標準形を用いても，実際の計算では他の手段を用いるのと同様である．

このように誤解にもとづく面もあるが，一方，多項式行列演算が従来の数値計算ソフト，例えばMATLABではあまりサポートされて来なかったことも事実である．その意味で，Polboxのような支援ソフトが現れたことは注目に値する．

3. 多項式行列論入門

おなじみの状態空間表現

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t),\\ &y(t)=Cx(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

から始めよう．この系の伝達関数行列が

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B \tag{3}$$

なる有理関数行列で表されることは周知の通りである．

(2)式はシステムの内部表現であり，(3)式は外部表現であると見なすこともできる．有理関数行列である $G(s)$ 自体を演算の対象とする制御理論の構築も試みられたことがあったが，現代では $G(s)$ は主として性能評価（例えば H_∞ ノルム等）の対象とのみ考え，実際の計算は(2)式の定数行列 A,B,C を用いるのが普通である．このことが計算機処理を容易にし，大きな成功を収める要因になったわけである．

これに対し，多項式行列の既約分解表現は $G(s)$ 自体を扱うのと状態空間表現との中間的立場にあるものと考えられる．その定義を述べよう．

まず，正方な多項式行列 $U(s)$ に対して $U(s)^{-1}$ も多項式行列となるとき，$U(s)$ はユニモジュラであると言う．これは $\det U(s)$ が定数であることと同値であり，

$$U(s)=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad U(s)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4}$$

がその一例である．

さて，(3)式の伝達関数行列が適当なサイズの右既約な多項式行列 $N(s)$，$D(s)$ によって

$$G(s)=N(s)D(s)^{-1} \tag{5}$$

と表されるとき，これを右既約分解表現と呼ぶ．ここに $N(s)$，$D(s)$ が右既約であるとは，ユニモジュラ行列以外には右共通因子が存在しないときを言う．

このように複雑な定義になってしまうのは，$U(s)$ がユニモジュラなら常に右共通因子となるからである．つまり，任意の $N(s), D(s)$ に対して

$$\begin{pmatrix}N(s)\\ D(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N'(s)\\ D'(s)\end{pmatrix}U(s)$$

なる多項式行列 $N'(s)$，$D'(s)$ が存在する．このような場合を除き，本質的な共通因子のみ考えよう，というのが上の定義の発想である．(スカラ) 多項式ではユニモジュラは定数しかないため自明であるが，行列の場合は(4)式のような例が無数に存在するのである．

（注意1）行列の場合は分解に左右の区別がある．定義は左既約分解も全く同様なので省略するが，2節で触れたようにシステム同定の段階では左既約分解の方が自然である．オブザーバの設計でも同様である．しかし状態フィードバックには右既約分解が適している．これらの間には

$$N(s)D(s)^{-1}=\tilde{D}(s)^{-1}\tilde{N}(s) \tag{6}$$

なる関係がある．しかし，両者は一般に一致しないし，一方から他方へ変換する理論式も存在しないのである．

（注意2）$G(s)$ の各要素の最小公倍分母 $d(s)$ により

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}\Gamma(s)$$

なる表現もできる．$\Gamma(s)$ は多項式行列であり $d(s)$ は(2)式の A の最小多項式である[10]．この方が簡単に見えるが，実はあまり使われることはなく，システムの構造を

考える上では (5) 式が有利である．これは，(5) 式が最小実現と対応するからである．

（注意 3）多項式行列 $D(s)$ から列（または，行）ごとに最高次係数を取り出した定数行列を $[D(s)]_{\mathrm{C}}$（同様に，$[D(s)]_{\mathrm{R}}$）と表す．さて，与えられた $G(s)$ に対して右既約分解は一意的ではなく，任意のユニモジュラ行列を右から掛ける自由度が残されている．その中から特に

$$\det\,[D(s)]_{\mathrm{C}} \neq 0$$

なる $D(s)$ を選ぶことができる．この $D(s)$ は列既約と呼ばれ，望ましい性質を持っている．実は，さらに

$$[D(s)]_{\mathrm{R}} = I$$

も同時に満たすように右既約分解を選ぶことができる．

4. ツールボックスの概略

4.1 基本的な特徴

MATLAB がバージョン 5 に更新されたのに対応して，Polbox は現在，バージョン 2.0 が提供されている．これにより，多項式行列などの数学的オブジェクトを直接，参照できるようになった．例えば，$P(s)=\begin{pmatrix} 1 & s \\ -s & 2 \end{pmatrix}$ は

$\gg$ P = [1　s; −s　2]

と入力すれば定義できる（不定元となる文字は s, z 等，決まっている．途中で s に値を代入すれば，以後は数値と見なされる）．また，$P(s)$ と $Q(s)$ の和や積や行列式は単に

$\gg$ R = P + Q,　T = P * Q,　det(Q)

などと入力すればよい．これらは一見，当然のように思われるが，従来の MATLAB では多項式は単に係数のベクトルとして扱われており，まして多項式行列は扱えなかった．つまりこれは新たなデータ形式なのである．

ここで，数式処理言語との関係を述べておこう．多項式の係数に関する演算という意味では共通点も多いが，加減乗除だけではなく，行列分解や固有値計算のような近似（繰り返し）を伴うハードな数値計算もカバーしているのが Polbox の特徴である．そのために適したサブルーチンが多数，用意されている．これらは最新の研究成果に基づくアルゴリズムである．

たとえば，パラエルミート多項式行列 $\Phi(s)$ の J-スペクトル分解

$$\Phi(s) = M^T(-s)JM(s)$$

は，状態空間では代数 Riccati 方程式を解くことに相当するが，Polbox では $\Phi(s)$ の係数行列を用いた数値計算法によって計算される．一方，数式処理言語と比べて非線形関数はあまりサポートされていない．

なお，Polbox では Symbolic Math ツールボックスや Control System ツールボックスへのデータ変換もできるので，必要に応じて数式処理言語や状態空間演算を利用すれば良い．

次に，多項式行列の入力には優れた GUI の機能を有した専用のエディタが用意されている．これは些細なことのように見えるが，多項式行列は行・列・項という，言わば 3 次元の配列データであるので，係数を間違いなくタイプ入力するためには実用性の高い機能である．

4.2 利用例

いま，対象システムについて (1) 式に対応する左既約な多項式行列 $\tilde{D}(s)$，$\tilde{N}(s)$ が得られたと仮定し，それらを Dt, Nt で表そう．

まず，多項式行列演算における基本的な演算や判定は容易に実行できる．例えば，

$\gg$ isprime([Dt,　Nt])

とタイプすると，Dt, Nt が左既約なら値 1 が返される．そうでなければ，これらから左既約分解を計算するコマンドももちろんある．

一方，フィードバック設計には (5) 式の右既約分解の方が有用である．しかし，注意 1 で述べたように右・左の変換は決して自明ではない．(6) 式を

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(s) \\ D(s) \end{pmatrix} = 0$$

と書き直せば，これがスペクトル分解とは異なり，$N(s)$，$D(s)$ を未知行列とする線形方程式の一種であることが分かる．Polbox ではこの種の多項式行列方程式の数値解法も多数，備えており（Diophantine 方程式も別の例である），

$\gg$ [N,　D] = lmf2rmf([Nt,　Dt])

によって N, D が得られる．ただしこれは注意 3 で述べたように一意的では全くない．コマンド colred( ) により D を列既約にすることができる．

設計支援の一例として，全ての安定化器の多項式行列によるパラメータ表示を与えるコマンドもある．ただし，安定化器がプロパとなるよう，パラメータを選ぶ必要がある．プロパ性が保証されているという点では，よく知られた安定有理関数行列による既約分解でのパラメータ表示の方が優れている．しかし，2 節でも触れたように，

プロパに限定しないことが利点となる場合もあると考えられる。

一方，多項式行列アプローチは極配置や有限整定の計算には適しているので，これらについては有用性が高い。また，LQG や H_2 制御，H_∞ 制御のルーチンも含まれており，状態空間表現で行える計算は，ほぼ全て同じように（しかし，別のやり方で）できるといって良い。

また，多項式と言えば区間多項式など，パラメトリックな不確かさに対するロバスト制御理論も想起されよう。Polbox では値集合のプロットも容易であり，設計・解析のための有力な支援ツールとなり得るのではないかと思われる。ポリトープ型の不確かさも扱えるようである。

5. おわりに

多項式行列を用いることの応用上の利点については筆者の手に余るため，本稿では触れることができなかった。前述した Europoly には V. Kucera, M. J. Grimble, S. Bittanti といった著名な研究者も参画し，企業も交えてワークショップを開催するなど活発に活動している。その記録は上述の Web サイト（や，そのリンク先）に詳しく公開されている。そこからの情報によれば，産業界への多彩な応用事例も始まっているとのことである。多項式アプローチによる制御系設計についてのテキストも出版されている [16]。

これらの活動については端緒についたばかりであり，多項式アプローチが真に実用上の利点を有するかどうかについてはまだ意見が分かれよう。理論解析には多項式行列を用い，実際の計算は状態空間表現を利用するというアプローチもあり得るからである。しかし，Polbox は従来敬遠されがちだった手法を手軽に使えるものにしたという点で，少なくとも理論研究へのインパクトは大きいと考えられる。

さらに，多項式行列の発想や手法は，新しいシステム表現として注目を浴びている behavioral approach[17,18] にも受け継がれ，今や基礎理論だけでなく，様々な応用上の可能性が検討されつつある。その最新の動向については，IEEE Conference on Decision and Control など最近の国際会議を参照されたい。

末筆ながら，本稿を執筆する機会を与えていただきました編集委員会に謝意を表します。

(2000 年 2 月 18 日受付)

参 考 文 献

[1] The Polynomial Toolbox 2 Manual, PolyX, Ltd. (1999)
[2] R. E. Kalman, P. L. Falb, and M. A. Arbib: *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill (1968)
[3] W. M. Wonham: *Linear Multivariable Control; A Geometric Approach*, Second Edition, Springer-Verlag (1979)
[4] H. H. Rosenbrock: *State Space and Multivariable Theory*, Wiley-Interscience (1970)
[5] W. A. Wolovich: *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag (1974)
[6] V. Kucera: *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, Wiley (1979)
[7] T. Kailath: *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc., (1980)
[8] 伊藤，木村，細江：線形制御系の設計理論，計測自動制御学会（発売元，コロナ社）(1978)
[9] 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会（発売元，コロナ社）(1978)
[10] 須田：線形システム理論，システム制御情報ライブラリ，朝倉書店 (1993)
[11] 木村，舟橋，細江：行列分解表現による線形制御系のシンセシス 1~3，計測と制御，Vol. 22, No. 2–4 (1983)
[12] 前田：線形システム理論の最近の動向，システムと制御，Vol. 24, No. 4, pp. 248–255 (1980)
[13] 山本：実現理論の最近の話題から — 集中系と分布系，システムと制御，Vol. 26, No. 10, pp. 650–659 (1982)
[14] 例えば，ミニ特集「適応制御におけるニュートレンド」，計測と制御，Vol. 35, No. 6 (1996)
[15] IFAC Conferences on System Structure and Control (1989, 92, 95, 98)
[16] M. J. Grimble and V. Kucera: *Polynomial Methods for Control Systems Design*, Springer (1996)
[17] J. W. Polderman and J. C. Willems: *Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach*, Springer-Verlag (1998)
[18] J. C. Willems: Behaviors, Latent Variables, and Interconnections; システム/制御/情報, Vol. 43, No. 9, pp. 453–464 (1999)